

Часть I. ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

Лекция 1. Основы кинематического анализа в строительной механике

1. Базовые понятия: изменяемость и неизменяемость систем; диски, связи, степени свободы
2. Количество связей как критерий изменяемости и определимости систем

1

Объекты строительной механики — инженерные сооружения, которые представляют собой совокупность конструктивных элементов (стержней, оболочек, пластин и массивных тел), соединенных между собой связями в единое целое. Инженерное исследование сооружения проводится на основе его расчетной схемы. *Расчетная схема есть упрощенное представление сооружения, учитывающее основные данные, определяющие поведение объекта под нагрузкой.*

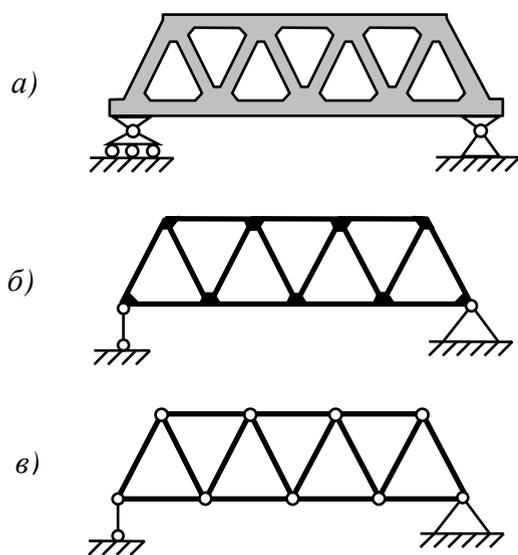


Рис. 1.1

На рис. 1.1 показан переход от реального сооружения (моста) к его полной расчетной схеме, в которой стержни заменены их осевыми линиями и рассматриваются как прямые стержни в строгом смысле (т. е. без вырезов, кронштейнов и других особенностей), а также последующий переход к упрощенной расчетной схеме, в которой соединения стержней полагаются шарнирными.

Сооружения и их расчетные схемы различают по элементам, образующим их. В частности, рассматривают стержневые системы, образованные стержнями; тонкостенные системы, образованные пластинами и оболочками; массивные системы, образованные телами, примерно одинаково протяженными в трех измерениях.

Далее преимущественно рассматриваются плоские стержневые системы, у которых главные центральные оси стержней лежат в одной плоскости. Плоские системы часто входят в состав пространственных систем. Исследования плоских систем служат основой для расчетов пространственных систем.

Геометрически неизменяемые системы — это системы соединенных между собой твердых тел (элементов систем), допускающие изменение формы только при деформации элементов.

Геометрически изменяемые системы — это системы соединенных между собой твердых тел, допускающие конечные относительные перемещения тел без их деформации.

Мгновенно изменяемые системы — это системы соединенных между собой твердых тел, допускающие бесконечно малые относительные перемещения тел без деформации.

В последнем определении полагается, что деформация хотя и возникает при перемещениях, но имеет второй или более высокий порядок малости от величины перемещения.

Пример геометрически неизменяемой системы — шарнирный треугольник; пример геометрически изменяемой системы — плоский шарнирный четырехугольник; пример мгновенно изменяемой системы — шарнирная пара стержней, расположенных на одной линии и прикрепленная шарнирами к массивному телу (земле) (рис. 1.2).

Назовем диском плоскую стержневую систему или систему плоских тел, у которой взаимное положение точек не меняется при действии на него внешних сил (или пренебрежимо мало в рамках данной задачи). Отдельные части системы, в которых отсутствуют заметные взаимные перемещения, будем рассматривать как диски.

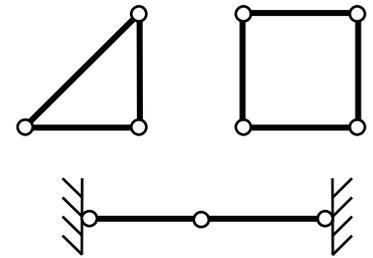


Рис. 1.2

Если внешние силы, действующие на систему, а также ее перемещения рассматриваются в системе отсчета, связанной с диском, то этот диск назовем землей. Все изучаемые далее конструкции рассматриваются в связи с землей, причем землю обычно рассматривают как объект, не принадлежащий системе.

Свободой системы называют ее способность совершать движение относительно земли без деформации элементов системы. Изменяемостью системы называют ее способность изменять форму за счет конечных перемещений элементов как твердых тел.

Степенью свободы системы C^ называют число независимых параметров, определяющих положение системы относительно земли.* При задании этого положения все элементы системы рассматривают как недеформируемые, т. е. как диски.

Степенью изменяемости системы I называют число независимых параметров, определяющих ее положение по отношению к одному из дисков, принимаемых за неподвижный.

Для изолированного диска на плоскости $C^* = 3$, поскольку такой диск может иметь два поступательных перемещения по направлению координатных осей и одно вращательное перемещение вокруг некоторой точки.

Если земля включена в состав системы, то $C^* = I$. Если система не связана с землей, то $C^* = I + 3$. В примере на рис. 1.3 $C^* = 3$, тогда как $I = 2$.

Система, содержащая связи с землей, называется прикрепленной. Система, не содержащая связей с землей, называется свободной. Частным случаем неизменяемости системы является неизменяемость относительно земли.

Диски соединяются между собой связями. В плоских системах два диска могут соединяться связями трех видов [1]:

Связь первого вида — абсолютно жесткий стержень с шарнирами на концах (рис. 1.4, а). Эту связь кратко можно называть *простым стержнем*. Она препятствует поступательному перемещению одного диска относительно другого по направлению стержня и уничтожает одну степень свободы у двух соединяемых дисков. Связь создает силы реакции, действующие на соединяемые диски. Эти силы действуют вдоль осевой линии стержня и направлены противоположно одна другой¹.

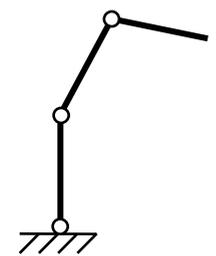


Рис. 1.3

¹ Силы реакции связи не рекомендуется называть парой сил: хотя они равны и противоположно направлены, но приложены к разным телам и действуют по одной линии, тогда как пара сил должна действовать на одно твердое тело и создавать ненулевой момент [9; 28].

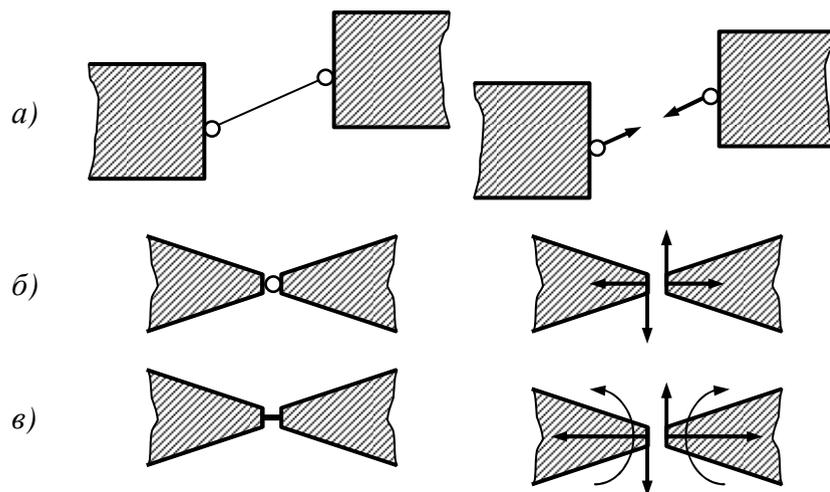


Рис. 1.4. Связи различных видов и реакции связей

Связь второго вида — цилиндрический шарнир (рис. 1.4, б). Он препятствует поступательным перемещениям одного диска относительно другого. Связь уничтожает две степени свободы у двух соединяемых дисков. Линия действия реактивных сил проходит через шарнир и может иметь произвольное направление. Обычно каждую из сил реакции этой связи раскладывают на две составляющих заданных направлений. Шарнирная связь может быть образована двумя связями первого вида с общим шарниром.

Связь третьего вида — припайка (рис. 1.4, в). Припайка не допускает ни поступательных, ни вращательных перемещений одного диска относительно другого. Она уничтожает три степени свободы и соединяет два диска в один. Припайка создает совокупность сил, которой соответствует реактивная сила любого направления (равнодействующая) и момент сил. Припайка может быть образована тремя связями первого вида.

Три перечисленных вида связи в частном случае обращаются соответственно в шарнирно-подвижную опору, шарнирно-неподвижную опору и в заделку.

Рассмотренные связи, соединяющие два диска, называются простыми связями. Если шарнир или припайка соединяют не два диска, а больше (рис. 1.5), то такие связи называют кратными. **Кратные связи заменяют собой столько простых шарниров или припаяек, сколько дисков они соединяют без одного.**

Места соединения дисков называют узлами. В стержневых системах различают узлы шарнирные, жесткие и смешанные (рис. 1.6).

Рассмотрим характер связей при образовании неизменяемой системы из двух и трех дисков.

1. Двухдисковые системы. При минимальном числе связей можно получить неизменяемую систему из двух дисков, если соединить диски тремя стержнями, либо стержнем и шарниром, либо припайкой.

Удаление какой-либо из связей приводит к изменяемости пары дисков. При соединении дисков тремя стержнями для неизменяемости достаточно, чтобы эти стержни не пересекались в общей точке и не были параллельны. Если же три и более соединительных стержня пересекаются в общей точке, получаем мгновенно изменяемую систему, в которой связи не препятствуют бесконечно малому взаимному повороту дисков

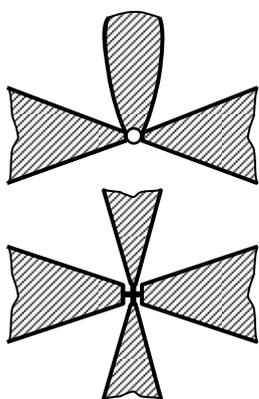


Рис. 1.5

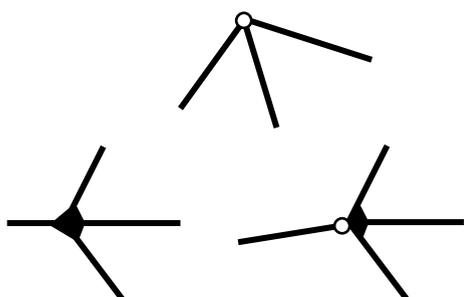


Рис. 1.6

вокруг мгновенного центра вращения K , образованного пересечением стержней (рис. 1.7, *a*). При соединении дисков шарниром и стержнем для неизменяемости достаточно, чтобы стержень не проходил через шарнир (противоположный случай показан на рис. 1.7, *б*). В противном случае система окажется также мгновенно изменяемой.

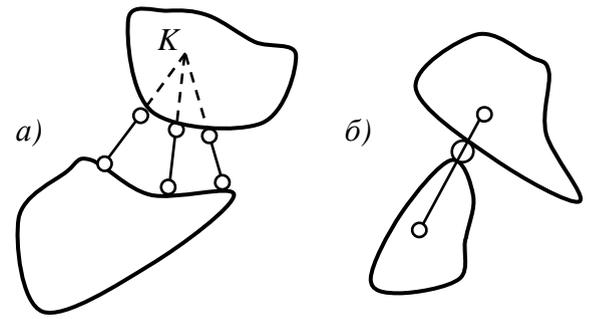


Рис. 1.7

2. Трехдисковые системы. Неизменяемую систему из трех дисков можно получить присоединением к неизменяемой двухдисковой системе третьего диска по описанным правилам. Можно также указать на специальные случаи образования трехдисковых систем, когда удаление хотя бы одной связи делает систему изменяемой. Именно три диска можно соединить попарно, причем каждое соединение может быть шарниром или парой стержней (примеры на рис. 1.8, *a*, *б*). Условием неизменяемости такой системы будет требование, чтобы шарниры и точки пересечения стержней, соединяющих каждую пару дисков, не лежали на одной прямой. Дело в том,

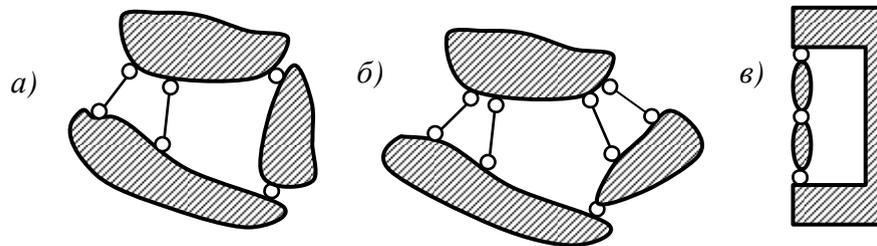


Рис. 1.8

что точка пересечения пары стержней есть центр мгновенного вращения одного диска относительно другого, а если центры мгновенного вращения трех дисков окажутся на одной прямой, то появляется возможность бесконечно малого поворота, когда один из центров движется по нормали к прямой, соединяющей два других. Иначе говоря, система становится мгновенно изменяемой как, например, на рис. 1.8, *в*.

Неизменяемые системы из произвольного числа дисков, образованные по правилам соединения двух и трех дисков, называют простыми.

Все сказанное об образовании неизменяемых систем из двух и трех дисков относится к системам, неизменяемым относительно земли, если землю полагать одним из дисков.

Связи различаются не только усилиями, которые они создают, и перемещениями, которые они допускают, но также ролью в изменяемости и определенности заданной системы. По функциональному признаку каждая связь в системе может быть:

- необходимой, если ее удаление делает систему изменяемой;
- лишней, если ее удаление оставляет систему неизменяемой;
- ложной, если она допускает бесконечно малые перемещения соединяемых ею дисков.

Ложные связи имеются только в мгновенно изменяемых системах.

Реакции связей могут быть статически определенными или неопределенными, т. е. они могут определяться из уравнений статики, составленных для дисков системы, либо, напротив, эти уравнения не позволяют их однозначно определить. Известно следующее свойство реакций связей [1, с. 23]: **реакции необходимых связей неизменяемых систем статически определенны, реакции лишних связей таких систем статически неопределены, и реакции ложных связей статически неопределены.**

Поясним это свойство. Удаление необходимой связи при некоторой системе нагрузок вызовет взаимное движение дисков системы. Равновесие дисков обеспечивается лишь при известных силах реакции в необходимой связи, определяемых из условия равенства нулю суммы сил и моментов, действующих на каждый диск, т. е. определяемых из уравнений статики. Напротив того, в лишней связи можно искусственно создать силу реакции произвольной величины при сохранении неизменяемости системы, т. е. при заданных нагрузках эта реакция вообще неопределима. Наконец, в ложной связи можно создать произвольную искусственную реакцию, которая уравнивается силами реакции в прилежащих связях.

2

Из сопротивления материалов известно, что силы, действующие на конструкцию, принято разделять на внешние и внутренние. Внешние силы, в свою очередь, разделяются на нагрузки и опорные реакции.

Если внутренние силы, действующие в неизменяемой механической системе, находящейся в равновесии, при любых нагрузках и недеформированном состоянии элементов системы определяются из уравнений статики для системы или отдельных ее частей, то такая система называется статически определимой [1].

Если внутренние силы, действующие в неизменяемой механической системе, находящейся в равновесии, при некоторой совокупности нагрузок не определяются из уравнений статики, то такая система называется статически неопределимой.

Обычно при анализе статической определимости полагают, что система образована из статически определимых дисков, т. е. внутренние силы в любом диске однозначно определяются реакциями связей при заданных нагрузках. Поэтому **статическую определимость системы дисков принято связывать с определимостью реакций связей из уравнений статики.** Будем полагать, кроме того, что нагрузки не могут быть приложены к связям, а только к дискам. Ввиду этого можно ограничиться составлением уравнений статики только для дисков.

Пусть система содержит D дисков, которые соединены простыми связями в количестве C стержней, $Ш$ шарниров, $П$ припаек. Рассмотрим вначале прикрепленную систему, которая связана с землей простыми стержнями числом $C_{оп}$.

Получим соотношения, определяющие условия изменяемости такой системы.

Общее число реакций связей определяется величиной

$$N_{св} = C + 2Ш + 3П + C_{оп}. \quad (1.1)$$

Если связи второго и третьего типов представить как эквивалентные соединения стержней (связей первого типа), то формула определяет общее число соединительных стержней. Данное число назовем *числом связей в системе.*

Диски системы в отсутствии связей имеют $3D$ степеней свободы. Число степеней свободы, которое может быть уничтожено связями, не может быть больше числа связей (1.1). В результате для числа степеней свободы получаем:

$$C^* \geq 3D - (C + 2Ш + 3П + C_{оп}). \quad (1.2)$$

Если система неизменяема относительно земли, то $C^* = 0$, и приходим к *необходимому условию неизменяемости прикрепленной системы:*

$$3D \leq C + 2Ш + 3П + C_{оп}. \quad (1.3)$$

Данное условие не является достаточным, потому что связи могут быть размещены с избытком для некоторой группы дисков, но не связывать в неизменяемую совокупность другие диски. Вопрос об изменяемости или мгновенной изменяемости системы решается с помощью кинематического анализа.

Если система неизменяема и неравенство (1.3) оказывается равенством, то имеем минимально допустимое число связей в неизменяемой системе. Итак, для неизменяемой системы при условии:

$$3Д = С + 2Ш + 3П + С_{оп} \quad (1.4)$$

все связи необходимы, и система статически определима.

В курсе сопротивления материалов вводилась степень статической неопределимости как разность между числом неизвестных усилий, определяющих напряженное состояние стержневой системы, и числом независимых уравнений статики [2, с. 117]. Число усилий в узлах есть правая часть условия (1.3), и эти усилия определяют напряженное состояние стержней, тогда как число уравнений статики равно левой части условия (1.3). В результате получаем выражение для степени статической неопределимости прикрепленной стержневой системы:

$$n = С + 2Ш + 3П + С_{оп} - 3Д. \quad (1.5)$$

Это число оказывается числом лишних связей системы.

Соотношения (1.2)–(1.5) можно изменить так, чтобы они позволяли делать заключения об изменяемости и определимости свободных систем. В свободной системе общее число реакций связей определяется величиной

$$N_{св} = С + 2Ш + 3П. \quad (1.6)$$

Эта величина называется *числом связей между дисками системы*, поскольку определяет общее число простых стержней, образующих связи всех видов.

Относительно произвольного диска системы, который полагается неподвижным, остальные диски в отсутствие связей имеют $3(Д - 1)$ степени свободы. Число степеней свободы, которое может быть уничтожено связями, не может быть больше числа связей (1.6). В результате для степени изменяемости системы получаем:

$$И \geq 3(Д - 1) - (С + 2Ш + 3П). \quad (1.7)$$

Если система неизменяема, то $И = 0$, и получаем *необходимое условие неизменяемости свободной системы*:

$$3(Д - 1) \leq С + 2Ш + 3П. \quad (1.8)$$

Для неизменяемой системы при условии:

$$3(Д - 1) = С + 2Ш + 3П \quad (1.9)$$

все связи необходимы, и система статически определима.

Левая часть соотношения (1.9) определяет число уравнений статики для свободной неизменяемой системы. Заметим, что по сравнению с прикрепленной системой число независимых уравнений статики уменьшилось на 3. Дело в том, что совокупность нагрузок, действующих на свободную плоскую систему, должна удовлетворять трем условиям равновесия, тогда как в случае прикрепленной системы нагрузки могут быть любыми.

Число усилий в узлах есть правая часть условия (1.9). Степень статической неопределимости стержневой системы в данном случае имеет вид:

$$n = С + 2Ш + 3П - 3(Д - 1). \quad (1.10)$$

Дополнение к лекции

Кинематический анализ плоских систем в примерах

Цель кинематического анализа состоит в определении вида системы: изменяемая, неизменяемая или мгновенно изменяемая. После заключения о виде системы может потребоваться дополнительный кинематический анализ для предложения дополнительных связей, которые позволяют сделать изменяемую систему неизменяемой, или удаления лишних связей, чтобы обеспечить статическую определимость системы.

На рис. 1Д.1 имеем двухдисковую систему, для которой условие (1.3) имеет вид:

$$3 \cdot 2 \leq 2 + 2 \cdot 1 + 4.$$

Система может быть неизменяемой. Удаляем два стержня ab и cd , рассматриваем землю как диск и обнаруживаем простую трехдисковую систему. Итак, система неизменяемая и содержит две лишних связи. Убедиться, что лишних связей действительно две, можем с помощью формулы (1.5), т. е. вычитая число возможных степеней свободы из общего числа связей.

На рис. 1Д.2, *а* имеем трехдисковую систему, которая получена из предыдущей системы шарнирным присоединением третьего диска. Система изменяема, хотя содержит лишнюю связь:

$$n = (2 + 2 \cdot 2 + 4) - 3 \cdot 3 = 1.$$

К неизменяемой статически определимой системе можно перейти удалением одного соединительного стержня и переносом другого, как показано на рис. 1Д.2, *б*.

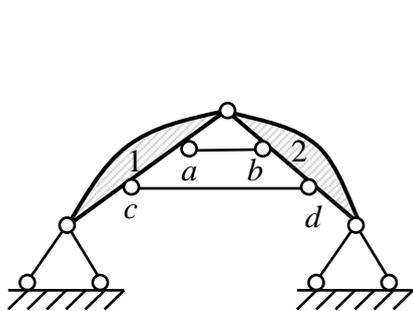


Рис. 1Д.1

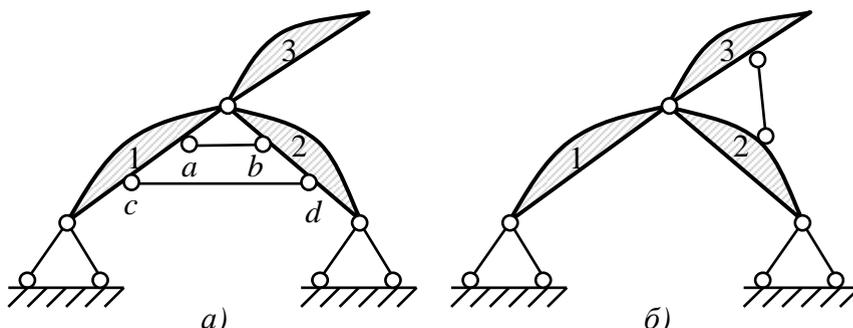


Рис. 1Д.2

Система на рис. 1Д.3 получена последовательным присоединением дисков неизменяемым способом с минимальным числом связей. Система неизменяема и статически определима, что подтверждается равенством (1.4):

$$3 \cdot 3 = 2 + 2 \cdot 2 + 3.$$

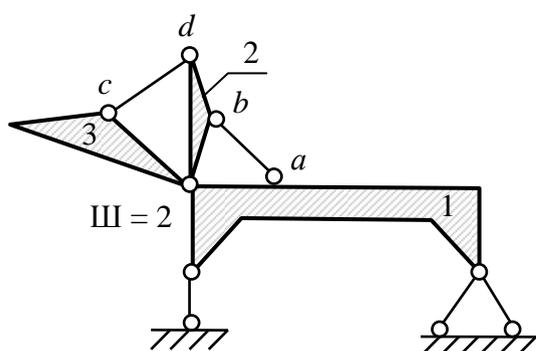


Рис. 1Д.3

Более интересен пример на рис. 1Д.4, *а*. Система изменяема, имеет пять дисков, девять стержней, один шарнир и три опорных связи. Согласно формуле (1.2) эта система имеет не менее одной степени свободы:

$$C^* \geq 3 \cdot 5 - (9 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3) = 1.$$

Установить недостающие связи можно, объединяя элементы системы в укрупненные диски по рассмотренным правилам соединения. Обнаруживаем, что диски 1, 2, 3 не могут образовать неизменяемой трех-

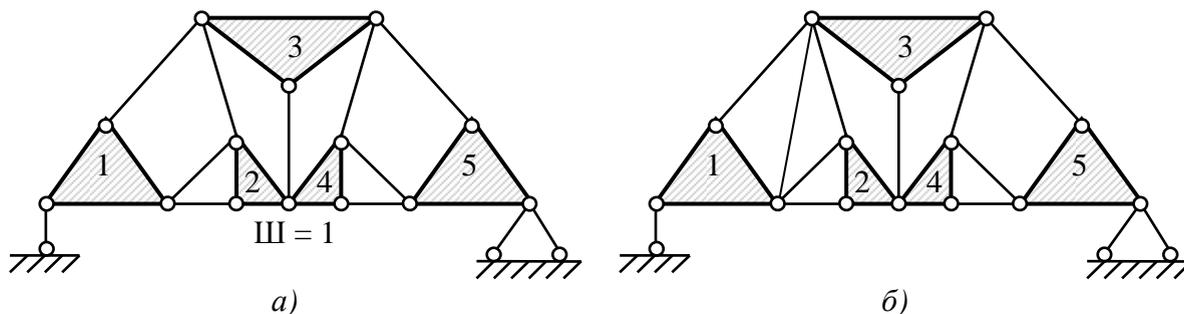


Рис. 1Д.4

дисковой системы из-за недостатка одной стержневой связи. Если эту связь привнести в систему, как показано на рис. 1Д.4, б), то далее остальные два диска присоединяются неизменяемым способом, и получаем статически определимую неизменяемую систему.

Трехдисксовая система на рис. 1Д.5 мгновенно изменяема: хотя число связей между парами дисков отвечает правилу образования неизменяемых систем, но мгновенные центры вращения дисков (1,3) и (2,3) оказываются на одной прямой с шарниром H .

Проверим неизменяемость системы на рис. 1Д.6 по критерию (1.3):

$$3 \cdot 6 = 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 6.$$

Система может быть неизменяемой. Если данную систему строить последовательным присоединением к земле дисков, следующих по порядку номеров, то соблюдаются правила образования простой системы (при построении земля считается за дополнительный диск).

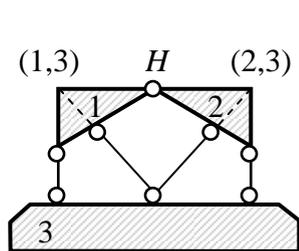


Рис. 1Д.5

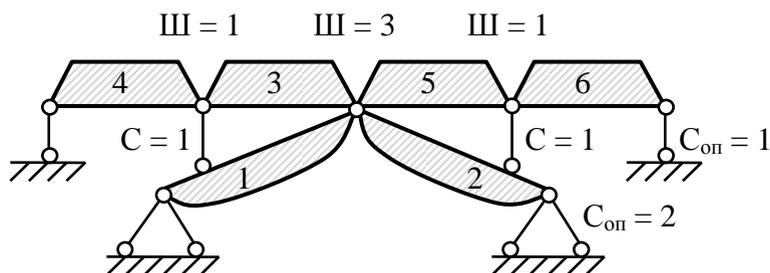


Рис. 1Д.6

Стержневая система на рис. 1Д.7 мгновенно изменяема. В данной системе выделены штриховкой неизменяемые диски и показано, что связи между этими дисками создают мгновенные центры поворота. Читателю рекомендуется проверить выполнение для этой системы условия (1.4).

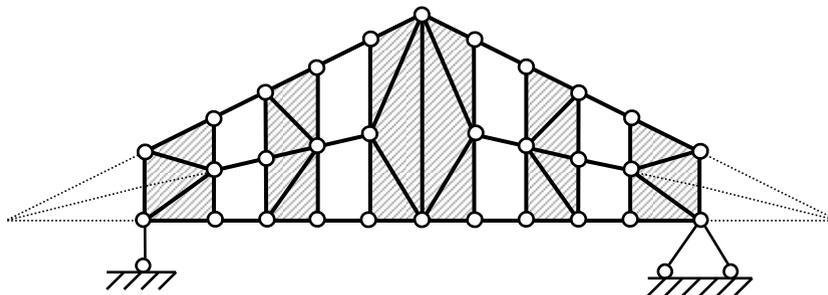


Рис. 1Д.7